

Matematik och beräkning
Nya verktyg, nya möjligheter

Anders Logg

Simula Research Laboratory / Oslo Universitet

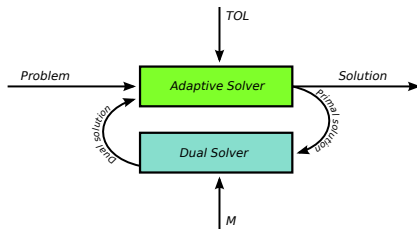
Smögens skola, 19 mars 2010

Min bakgrund

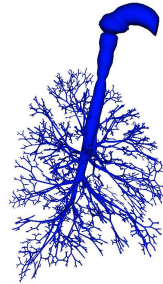
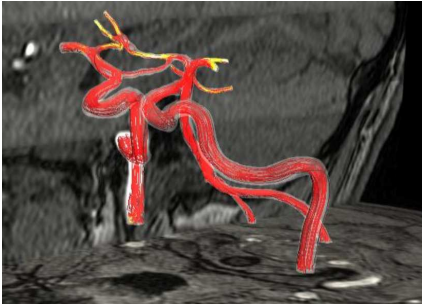
- Smögens förskola (1983)
- Smögens skola (1983–1989)
- Sotenässkolan (1989–1992)
- Gullmarsgymnasiet (1992–1995)
Naturvetenskaplig linje
- Chalmers tekniska högskola (1995–1999)
Civilingenjör (teknisk fysik)
- Chalmers tekniska högskola (1999–2004)
Teknologie doktor (tillämpad matematik)
- Toyota Technological Institute at Chicago (2004–2006)
Postdoc
- Simula Research Laboratory (2006–)
Forskare
- Oslo Universitet (2006–)
Lektor (førsteamanuensis)

Min forskning

- Gruppledare för forskningsgruppen *Automated and Distributed Computing*
- Automatiserad beräkning
- Distribuerad beräkning



Tillämpningar

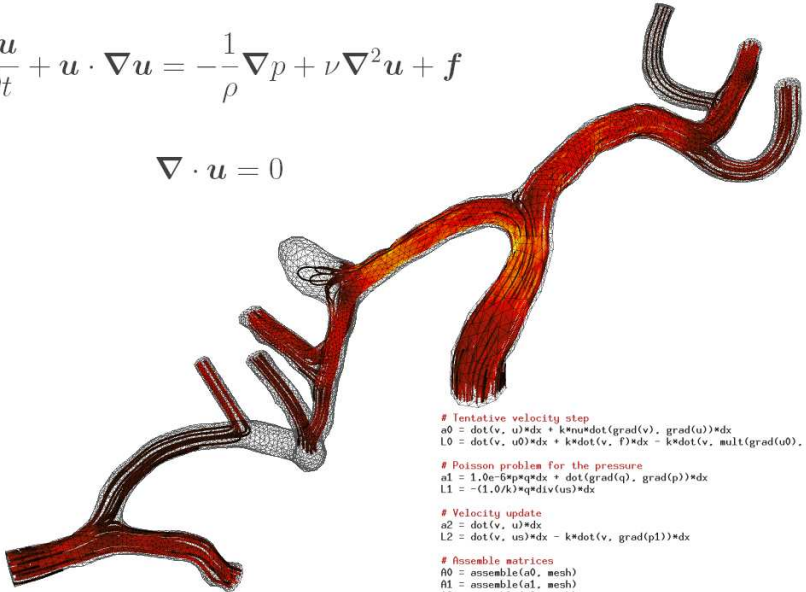


Simulations by Kent-Andre Mardal, Kristian Valen-Sendstad and Aron Wahlberg

Beräkning

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$



```
# Tentative velocity step
```

```
a0 = dot(v, u)*dx + k*nu*dot(grad(v), grad(u))*dx
```

```
L0 = dot(v, u0)*dx + k*dot(v, f)*dx - k*dot(v, mult(grad(u0), u0))*dx
```

```
# Poisson problem for the pressure
```

```
a1 = 1.0e-6*p*q*dx + dot(grad(q), grad(p))*dx
```

```
L1 = -(1.0/k)*q*div(us)*dx
```

```
# Velocity update
```

```
a2 = dot(v, u)*dx
```

```
L2 = dot(v, us)*dx - k*dot(v, grad(p1))*dx
```

```
# Assemble matrices
```

```
A0 = assemble(a0, mesh)
```

```
A1 = assemble(a1, mesh)
```

```
A2 = assemble(a2, mesh)
```

Vad är matematik?

Matematik handlar om att räkna ut saker...

...och om att studera de verktyg vi använder oss av för att räkna.

Matematiken är ett språk för att beskriva ekvationer (modeller)...

...och ett verktyg för att lösa ekvationerna.

Vad är matematik?

*Matematik handlar om att räkna ut saker...
...och om att studera de verktyg vi använder oss av för att räkna.*

*Matematiken är ett språk för att beskriva ekvationer (modeller)...
...och ett verktyg för att lösa ekvationerna.*

Vad är matematik?

*Matematik handlar om att räkna ut saker...
...och om att studera de verktyg vi använder oss av för att räkna.*

*Matematiken är ett språk för att beskriva ekvationer (modeller)...
...och ett verktyg för att lösa ekvationerna.*

Vad är matematik?

*Matematik handlar om att räkna ut saker...
...och om att studera de verktyg vi använder oss av för att räkna.*

*Matematiken är ett språk för att beskriva ekvationer (modeller)...
...och ett verktyg för att lösa ekvationerna.*

Vilka ekvationer?

Arrhenius equation, Bernoulli's equation, Black–Scholes equation, Boltzmann equation, Cauchy–Riemann equations, Dirac equation, Doppler equations, Einstein's field equation, Euler's equation, Relativistic Euler equations, Euler–Lagrange equation, Fisher equation, Fokker–Planck equation, Fredholm integral equation, Fresnel equations, Friedmann equations, Gibbs–Helmholtz equation, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, Helmholtz Equation, Ishimori equation, Karplus equation, Kepler's equation, Klein–Gordon equation, Korteweg–de Vries equation, Landau–Lifshitz equation, Lane–Emden equation, Langevin equation, Laplace's equation, Levy–Mises equations, Lotka–Volterra equation, Lindblad equation, Lorentz equation, Maurer–Cartan equation, Maxwell's equations, Michaelis–Menten equation, Navier–Stokes equations, Nernst equation, Pell's equation, Poisson's equation, Prandtl–Reuss equations, Prony equation, Rankine–Hugoniot equation, Riccati equation, Roothaan equations, Sackur–Tetrode equation, Schrödinger equation, Screened Poisson equation, Schwinger–Dyson equation, Sellmeier equation, Sine–Gordon equation, Stokes–Einstein relation, Van der Waals equation, Verhulst equation, Vlasov equation, Wiener equation. . .

Olika typer av ekvationer

- Lösningen x är ett tal

$$2x + 5 = 15$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \cos x$$

- Lösningen u är en *funktion*

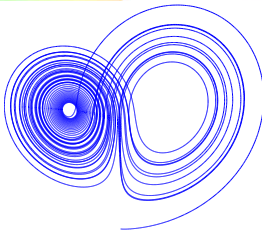
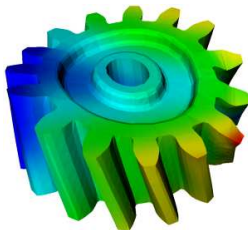
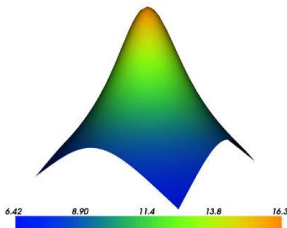
$$-\Delta u = f$$

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

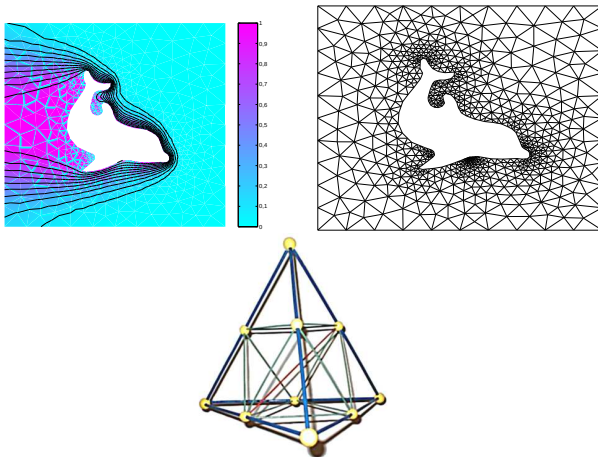
Differentialekvationer

- De flesta modeller är differentialekvationer
- Lösningen är en funktion $u = u(x, t)$



Hur löser man differentialekvationer?

- Dela in rum och tid i små delar (element)
- Skriv om differentialekvationen som en enkel ekvation på varje litet element. . .
- Lös ekvationerna. . .



Ekvationslösning på högstadiet

$$2x + 5 = 15$$

$$2x + 5 - 5 = 15 - 5$$

$$2x = 10$$

$$2x/2 = 10/2$$

$$\underline{x = 5}$$

Ekvationslösning på högstadiet (algorithm)

$$2x + 5 = 15$$

$$2x = 10$$

$$\underline{x = 5}$$

Ekvationslösning på gymnasiet

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 + 2 = 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2$$

$$(x - 2)^2 = 2$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{2}$$

$$\underline{x = 2 \pm \sqrt{2}}$$

Ekvationslösning på gymnasiet (algorithm)

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = 4/2 \pm \sqrt{(4/2)^2 - 2}$$

$$\underline{x = 2 \pm \sqrt{2}}$$

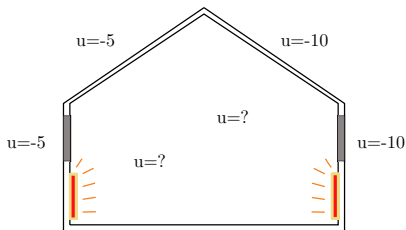
Ekvationslösning på högskolan

$$x = \cos x$$

$x = ?$ (Finns ingen enkel formel)

$$-\Delta u = f$$

$u = ?$ (Vad är formeln för ett hus?))



Ekvationslösning på mellanstadiet?

Kan man lösa $x = \cos x$ på mellanstadiet?

Ja!

Kan man lösa $-\Delta u = f$ på mellanstadiet?

Ja!

Ekvationslösning på mellanstadiet?

Kan man lösa $x = \cos x$ på mellanstadiet?

Ja!

Kan man lösa $-\Delta u = f$ på mellanstadiet?

Ja!

Ekvationslösning på mellanstadiet?

Kan man lösa $x = \cos x$ på mellanstadiet?

Ja!

Kan man lösa $-\Delta u = f$ på mellanstadiet?

Ja!

Ekvationslösning på mellanstadiet?

Kan man lösa $x = \cos x$ på mellanstadiet?

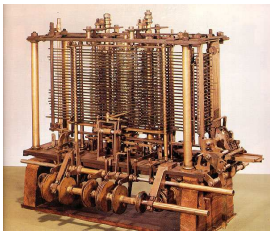
Ja!

Kan man lösa $-\Delta u = f$ på mellanstadiet?

Ja!

Hur?

- Enkla algoritmer
- Snabba datorer
- $+$, $-$, $\cdot$, $/$
- Enkelt men kraftfullt



Tillbaka till andragradaren

- Lösningen är $x = 2 \pm \sqrt{2}$
- Men vad är $\sqrt{2}$?
- Har vi verkligen löst ekvationen?
- Startgissning $x = 3$
- Om $x = 3$ är för stor, så är $y = 2/x$ för liten ($x \cdot y = 2$)

$$\frac{x + 2/x}{2}$$

Tillbaka till andragradaren

- Lösningen är $x = 2 \pm \sqrt{2}$
- Men vad är $\sqrt{2}$?
- Har vi verkligen löst ekvationen?
- Startgissning $x = 3$
- Om $x = 3$ är för stor, så är $y = 2/x$ för liten ($x \cdot y = 2$)

$$\frac{x + 2/x}{2}$$

Tillbaka till andragradaren

- Lösningen är $x = 2 \pm \sqrt{2}$
- Men vad är $\sqrt{2}$?
- Har vi verkligen löst ekvationen?
- Startgissning $x = 3$
- Om $x = 3$ är för stor, så är $y = 2/x$ för liten ($x \cdot y = 2$)

$$\frac{x + 2/x}{2}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.00000000000$$

$$x^2 = 1.83333333333$$

$$x^3 = 1.46212121212$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.462121212121$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.462121212121$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.46212121212$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.46212121212$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.46212121212$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.46212121212$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Roten ur två

$$x^n = \frac{x^{n-1} + 2/x^{n-1}}{2}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = 1.833333333333$$

$$x^3 = 1.46212121212$$

$$x^4 = 1.41499842989$$

$$x^5 = 1.41421378005$$

$$x^6 = 1.41421356237$$

$$\underline{x^7 = 1.41421356237}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $x = \cos x$

$$x^n = \cos x^{n-1}$$

$$x^1 = 3.000000000000$$

$$x^2 = -0.9899924966$$

$$x^3 = 0.548696133603$$

...

$$x^{70} = 0.739085133216$$

$$x^{71} = 0.739085133215$$

$$\underline{x^{72} = 0.739085133215}$$

Att lösa $F(x) = 0$

Generell ekvation:

$$F(x) = 0$$

Exempel:

$$F(x) = 2x - 10$$

$$F(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$F(x) = x - \cos x$$

Generell lösningsmetod: Skriv om $F(x) = 0$ på formen

$$x = T(x)$$

Upprepa:

$$x^n = T(x^{n-1})$$

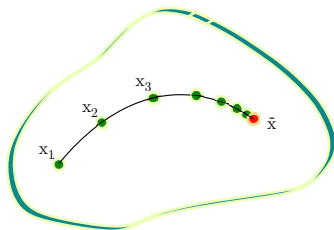
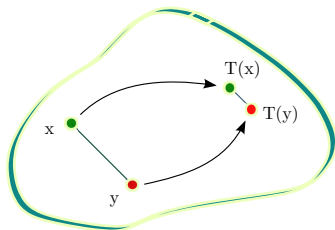
När konvergerar x_n mot x ?

Banachs fixpunktssats. Låt (X, d) vara ett fullständigt metriskt rum. Låt $T : X \rightarrow X$ vara en kontraktion på X , dvs

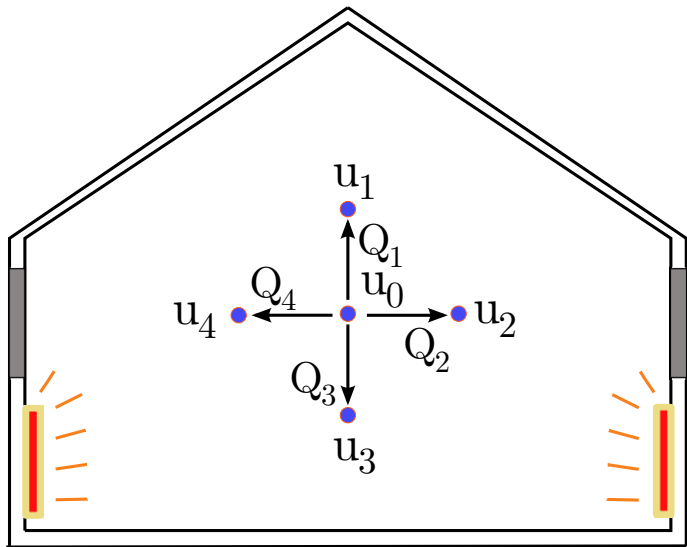
$$\exists M < 1 : d(T(x), T(y)) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Då har avbildningen T en entydig fixpunkt, dvs

$$\exists! \bar{x} \in X : \bar{x} = T(\bar{x}).$$



Att lösa Poissons ekvation



u = temperatur, Q = värmeflöde

Att lösa Poissons ekvation

Energibalans:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

Värme flödar från varmt till kallt:

$$Q_1 = u_0 - u_1 \quad Q_2 = u_0 - u_2$$

$$Q_3 = u_0 - u_3 \quad Q_4 = u_0 - u_4$$

$$(u_0 - u_1) + (u_0 - u_2) + (u_0 - u_3) + (u_0 - u_4) = 0$$

$$4u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

Poisson's ekvation

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}$$

Att lösa Poissons ekvation

Energibalans:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

Värme flödar från varmt till kallt:

$$Q_1 = u_0 - u_1 \quad Q_2 = u_0 - u_2$$

$$Q_3 = u_0 - u_3 \quad Q_4 = u_0 - u_4$$

$$(u_0 - u_1) + (u_0 - u_2) + (u_0 - u_3) + (u_0 - u_4) = 0$$

$$4u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

Poisson's ekvation

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}$$

Att lösa Poissons ekvation

Energibalans:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

Värme flödar från varmt till kallt:

$$Q_1 = u_0 - u_1 \quad Q_2 = u_0 - u_2$$

$$Q_3 = u_0 - u_3 \quad Q_4 = u_0 - u_4$$

$$(u_0 - u_1) + (u_0 - u_2) + (u_0 - u_3) + (u_0 - u_4) = 0$$

$$4u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

Poisson's ekvation

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}$$

Att lösa Poissons ekvation

Energibalans:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

Värme flödar från varmt till kallt:

$$Q_1 = u_0 - u_1 \quad Q_2 = u_0 - u_2$$

$$Q_3 = u_0 - u_3 \quad Q_4 = u_0 - u_4$$

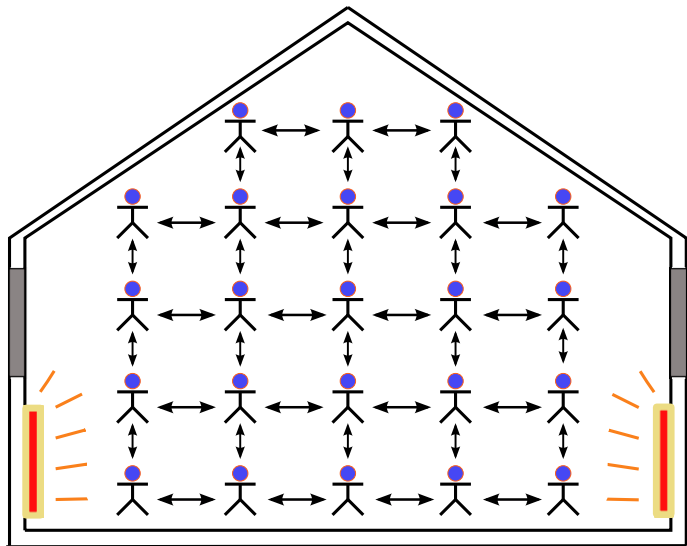
$$(u_0 - u_1) + (u_0 - u_2) + (u_0 - u_3) + (u_0 - u_4) = 0$$

$$4u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

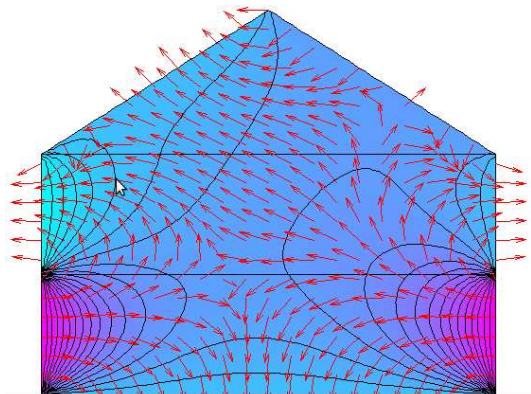
Poisson's ekvation

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}$$

Att lösa Poissons ekvation



Att lösa Poissons ekvation



Hur bemöta begåvade elever?

- Läraren måste ha något extra i bakfickan
- Våga utmana eleverna
- Våga låta eleverna gå före
- Måste finnas en morot



Sammanfattning

- Nya verktyg ger nya möjligheter
- Enkla men kraftfulla algoritmer
- Beräkning är matematikens kärna
- Våga använda datorn / miniräknaren!

